

Grandeurs et mesures

1) Les grandeurs et les mesures

Une **grandeur** est un caractère d'un objet susceptible de varier d'un objet à l'autre. À l'école, on étudie les **longueurs**, les **aires**, les **masses**, les **volumes** et les **durées**.

La grandeur d'un objet est toujours définie par deux relations qui lient les objets : une **relation d'égalité** (ce segment est aussi long que celui-ci) et une **relation d'inégalité** (ce segment est plus long que celui-ci). Ces **comparaisons** peuvent être **directes** (mentalement ou expérimentalement) ou **indirectes** (on utilise un objet intermédiaire comme une balance).

Pour un **même objet**, on peut définir **plusieurs grandeurs** : masse, volume, longueur... Une grandeur peut être définie **sans avoir recours aux nombres** mais c'est souvent fastidieux, c'est pourquoi on utilise des **mesures**.

La **mesure de la grandeur** d'un objet est le **nombre d'unités nécessaires permettant de réaliser une grandeur égale à celle de l'objet**. La mesure est un **nombre** ; elle dépend de l'**unité choisie**, contrairement à la grandeur qui est invariante.

À l'école, l'élève doit apprendre à faire la différence entre un **objet réel** (baguette, boîte) et **géométrique** (segment, rectangle), entre la **grandeur** associée à cet objet et la **mesure** de cette grandeur.

Les grandeurs se définissent par des **comparaisons**, indépendamment des nombres. Pour cette raison, **l'étude des grandeurs précède celle des mesures**.

L'enseignement d'une grandeur et de sa mesure passe généralement par les étapes suivantes :

1. Travail sur la grandeur (comparaisons)
2. Travail sur la mesure à l'aide d'une unité (on reporte un gabarit un certain nombre de fois)
3. Travail sur la mesure en utilisant le calcul (le report du gabarit n'est pas toujours possible, on recourt alors au calcul)

2) Typologie des problèmes

A. Comparer des longueurs sans les mesurer

Comparer des longueurs de segments sans mesurer

- ① L'élève procède à **vue d'œil** sur les longueurs sont très différentes.
- ② L'élève **fait coïncider les deux extrémités des segments** si ceux-ci sont **transportables** (comparaison directe).
- ③ L'élève utilise **un objet intermédiaire transportable** ou **reporte la longueur du segment 1 sur le segment 2** avec un compas ou un objet unité (ou plusieurs).
- ④ L'élève utilise un **objet intermédiaire ou un objet unité** si les segments ne sont pas transportables (ex : tracés dans la cour)

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – objet transportable ou non – différence grandeurs importante ou non – matériel fourni 	<ul style="list-style-type: none"> – les élèves sont non conservants (si 2 longueurs sont superposées et égales, ils le voient, mais si on décale l'une des deux longueurs, ils pensent qu'elles ne sont plus égales) – difficultés de manipulation

Comparer des longueurs de lignes brisées et des périmètres non déployables

- ① Si l'élève dispose d'un compas, il reporte sur une demi-droite les longueurs des segments qui composent la ligne brisée ou le périmètre.
- ② Si l'élève dispose d'objets intermédiaires qu'il peut couper à la longueur qu'il veut, il les superpose sur chacun des segments de la ligne brisée, puis aligne les objets bout à bout.

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – matériel fourni – les différents segments qui composent la ligne brisée sont égaux ou non 	<ul style="list-style-type: none"> – l'élève ne voit pas le lien entre le compas et la comparaison (un compas sert seulement à tracer un cercle...) – théorèmes élèves « La ligne brisée la plus longue est celle qui contient le plus de segments » – difficultés de manipulation

Comparer des longueurs de lignes courbes et de périmètres avec un gabarit

- ① Si le gabarit est suffisamment long (ex : de la ficelle), l'élève peut faire coïncider des morceaux du gabarit avec chaque courbe à comparer. Il compare ensuite les longueurs des ficelles obtenues.
- ② Si le gabarit n'est pas suffisamment long, il faut le reporter autant de fois que nécessaire et comparer ensuite le nombre de reports (en cas d'égalité, comparer les restes).

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – longueur du gabarit fourni – longueurs de la ligne courbe par rapport au gabarit (nombre de reports exacts ou non) 	<ul style="list-style-type: none"> – problèmes de manipulation – difficultés à mémoriser le nombre de reports

B. Comparer des longueurs en les mesurant

Comparer des longueurs de segments avec un double-décimètre

- ① L'élève place une extrémité de l'objet sur le 0 de la graduation de son instrument de mesure et lit à quelle graduation arrive l'autre extrémité de l'objet. Si la longueur est supérieure à celle de la règle, il doit reporter le double-décimètre.

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – nature du rapport entre la longueur et les unités (cm et mm) 	<ul style="list-style-type: none"> – l'élève place l'extrémité de l'objet sur le début de la règle (erreur qui vient de l'utilisation de gabarits) – l'élève n'arrive pas à donner de résultat si la mesure n'est pas un nombre entier – erreur dans la lecture des mm (l'élève lit « vers l'arrière ») – l'élève est bloqué s'il faut reporter la règle – l'élève oublie d'ajouter les longueurs obtenues – difficultés de manipulation

Mesurer la longueur d'une ligne brisée ou d'un périmètre avec un double-décimètre

- ① L'élève mesure les longueurs de chacun des segments et additionne ces longueurs. Il peut utiliser la multiplication si ces segments sont de même longueur.

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – mesure de chaque segment (nombre entier ou pas) – nombre de segments qui composent la ligne brisée 	<ul style="list-style-type: none"> – l'élève ne fait pas le lien entre l'addition des mesures et la longueur totale de la ligne brisée – si les mesures de segments ne sont pas des nombres entiers, l'élève peut avoir des difficultés pour additionner les mesures – plus il y a de segments, plus de risque d'oubli et d'erreurs de calcul est important

Mesurer le périmètre d'un polygone par le calcul

- ① Si le polygone est un carré, un rectangle ou un polygone régulier, l'élève peut appliquer une formule ou utiliser un raisonnement.
- ② L'élève peut mesurer côté par côté et additionner ses mesures.
→ si la figure est un cercle, l'élève peut utiliser une ficelle ou une formule, si elle est connue.

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – mesure de chaque segment (nombre entier ou pas) – nombre de segments qui composent la ligne brisée – nature du polygone 	<ul style="list-style-type: none"> – mauvaise mémorisation de la formule (procédure ①) – confusion avec la formule de l'aire quand elle est connue (carré ou rectangle)

Effectuer des conversions d'unités de longueurs

- ① Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée est familière et proche, l'élève multiplie ou divise par 10.
- ② Si l'unité du nombre de départ ou d'arrivée n'est pas familière ou pas proche, l'élève utilise la multiplication ou la division par 10, 100 ou un tableau de conversion.

→ même cheminement pour les unités d'aire

Variables	Difficultés
<ul style="list-style-type: none"> – mesure de chaque segment (nombre entier ou pas) – nombre de segments qui composent la ligne brisée – nature du polygone 	<ul style="list-style-type: none"> – défaut de mémorisation de l'ordre des unités – méconnaissance des relations entre les unités – si le nombre de départ ou d'arrivée est un nombre décimal, il peut y avoir des erreurs d'écriture ou de calcul – utilisation abusive du théorème élève : « De deux aires, la plus grande est celle qui a le plus grand périmètre »

C. Comparer et mesurer des aires

Les surfaces données ont des aires très différentes

- ① L'élève fait une **comparaison à vue d'œil**.

Variables	Difficultés
– différence entre les aires visible ou non	– l'élève assimile aire et encombrement

Les surfaces données sont faciles à inclure l'une dans l'autre

- ① Si les surfaces sont déplaçables, l'élève peut **effectuer l'inclusion physiquement**.
 ② Si les surfaces ne sont pas déplaçables, il doit **effectuer l'inclusion mentalement**.

Variables	Difficultés
– surfaces déplaçables ou non	– l'élève est tenté de fermer les figures concaves (angle rentrant) pour comparer leurs aires

Les surfaces données peuvent être incluses l'une dans l'autre suite à un découpage/recollement

- ① Si l'élève a des ciseaux, il fait le **découpage**.
 ② Si l'élève a un crayon et une règle, il trace les **transformations sur sa feuille**.
 ③ S'il ne dispose pas d'instrument, il effectue ces **transformations mentalement**.

Variables	Difficultés
– instruments donnés à l'élève	– difficulté à anticiper les tracés, les découpages et les recompositions nécessaires – difficulté à mobiliser des images mentales

Les surfaces données ne peuvent pas être incluses l'une dans l'autre

- ① Si ce sont des figures usuelles, l'élève **calcule l'aire des surfaces (formules) et compare** les résultats.
 ② Si ces surfaces peuvent se ramener à la **réunion ou au complémentaire de surface usuelles**, l'élève les met en évidence.
 ③ Si aucune de ces deux procédures n'est possible, l'élève trace un **quadrillage** et calcule approximativement les aires.

Variables	Difficultés
– nature des surfaces	– problèmes de mémorisation des formules – erreurs de calcul – difficulté dans la décomposition de la figure – difficulté pour tracer le quadrillage – difficulté à dénombrer les carreaux

D. Autres grandeurs

• Masses

Comparer les masses sans recourir à des mesures : en soupesant ou en utilisant une balance Roberval

Mesurer la masse d'un objet avec une balance : balance Roberval ou balance électronique

Effectuer des conversions d'unités de masse

Résoudre des problèmes avec des unités de masse : comparaison, addition, soustractions, multiplication par un entier

• Capacité / volume

Comparer des capacités/volumes sans recourir à des mesures : à vue d'œil, en transvasant, en comparant des masses solides (s'il s'agit de solides homogènes). Noter que les enfants n'ont pas encore atteint l'étape de la conservation de la substance.

Mesurer la capacité d'un récipient en utilisant un liquide

Mesurer un volume en remplissant avec un volume unité : remplir un pavé droit avec des petits cubes identiques

Calculer le volume d'un pavé droit en utilisant une formule : c'est la seule formule à apprendre en élémentaire

Effectuer des conversions d'unités de contenance

• Durée

Lire l'heure sur une horloge à aiguilles (heures et minutes)

Convertir des unités de durée

Résoudre des problèmes liant horaires et durées : on donne l'heure de départ puis la durée et on doit trouver l'heure de fin ou l'inverse. L'élève peut procéder par calcul de proche en proche ou par soustraction mais attention : **les durées et les heures sont souvent confondues avec les nombres décimaux !**

Résoudre des problèmes utilisant des calculs sur des durées