Systèmes de numération

Un système de numération est un ensemble de symboles qui s'assemblent selon certains procédés. Ce système permet d'écrire des nombres naturels.

1) Système additif et positionnel

Système additif = addition de signes juxtaposés.

Ex : les chiffres romains. XVII = X + V + I + I = 10 + 5 + 1 + 1 = 17.

Système positionnel = plusieurs symboles qui ont une valeur différente selon leur forme et leur place dans le nombre.

Ex : système de numération décimal (le nôtre).

Dans 145, 1 = 1 centaine = 100, 4 = 4 dizaines = 40 et 5 = 5 unités = 5.

2) Les bases

La base est définie par le nombre de signes différents qui permettent d'écrire un nombre.

En base 10 → 10 chiffres En base 3 → 3 chiffres (0,1,2).

• La base 10

Dans la base 10, chaque nombre peut être décomposé en puissances de 10.
On s'aide d'un **tableau de numération** pour décomposer les nombres, où « a » correspond au chiffre et « ^{x} » à son rang dans le nombre :

10^5 = 100 000	10^4 = 10 000	10^3 = 1 000	10^2 = 100	10^1 = 10	10^0 = 1
a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0

Chaque nombre de base 10 correspond donc à :

$$\overline{hgfedcba} = h \times 10^7 + g \times 10^6 + f \times 10^5 + e \times 10^4 + d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10^1 + a \times 10^0$$

• Les autres bases

Dans les autres bases « B », les groupements se font par « B » éléments.
On peut utiliser un **tableau de numération** pour décomposer les nombres :

B^5	B^4	B^3	B^2	B^1	B^0
a^5	a^4	a^3	a^2	a^1	a^0

Chaque nombre de base B correspond donc à :

$$\overline{hgfedcba} = h \times B^7 + g \times B^6 + f \times B^5 + e \times B^4 + d \times B^3 + c \times B^2 + b \times B^1 + a \times B^0$$

Dans une base « B », les chiffres ont tous une valeur inférieure à « B ».
Ex : en base 5, les chiffres utilisés sont 0, 1, 2, 3, 4.
La suite des nombres de la base 5 sera donc : 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20, etc.

Méthodes

1) Écrire en base 10 un nombre donné en base « B »

• Écrire la composition du nombre dans le tableau de numération.
• Effectuer les calculs en base 10.

Ex : On veut écrire le nombre $\overline{212}^{trois}$ en base 10.

$3^4 = 81$	$3^3 = 27$	$3^2 = 9$	$3^1 = 3$	$3^0 = 1$
		2	1	2

$\overline{212}^{trois} = 2 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 2 \times 3^0 = 18 + 3 + 2 = 23$. **En base 10, $\overline{212}^{trois}$ est égal à 23.**

2) Écrire en base « B » un nombre donné en base 10

Méthode 1

• Diviser le nombre *a* (en base 10) par la base « B ».
• Diviser le quotient obtenu par « B ».
• Recommencer avec les nouveaux quotients jusqu'à obtenir un quotient inférieur à « B ».

Ex : On veut écrire 144 en base 5.

144 / 5 = 28,8. Le quotient est donc 28. Dans 144, il y a donc 28 groupes de 5.
Il reste 4 unités. On obtient **le chiffre des unités : 4**.
28 / 5 = 5, 6. Le quotient est donc 5. Dans 28, il y a 5 groupes de 5. Il reste 3 unités.
On obtient le **chiffre des « cinquaines » : 3**.
5 / 5 = 1. Le quotient est de 1. Dans 5, il y a un groupe de 5. Il reste 0 unité.
On obtient le **chiffre du rang « B^3 » et celui de « B^2 » : 1 et 0**.

144 en base 10 est donc égal à : $\overline{1034}^{cinq}$.

Méthode 2

• Créer le tableau de numération de la base « B ».
• Dans le nombre donné en base 10, chercher combien de fois on a la plus grande puissance possible de « B ».
• Recommencer avec les restes successifs et remplir le tableau.

Ex : On veut écrire 144 en base 5.

$5^4 = 625$	$5^3 = 125$	$5^2 = 25$	$5^1 = 5$	$5^0 = 1$
	1	o	3	4

$144 = 1 \times 125 = 1 \times 5^3$. Il reste 19. Cela détermine le plus grand chiffre du nombre.
$19 = 3 \times 5 = 3 \times 5^1$. Il reste 4. Cela détermine le chiffre du rang précédent.
$4 = 4 \times 1 = 4 \times 5^1$. Il reste 0.

144 en base 10 est bien égal à $\overline{1034}^{cinq}$.

3) Additionner deux nombres de base « B »

• Pour se faciliter le travail, on peut se créer une « table de Pythagore de l'addition ».

Ex : table de Pythagore pour la base 5

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

• On pose ensuite l'addition comme une addition classique.

Ex : On veut additionner $\overline{34}^{cinq}$ et $\overline{23}^{cinq}$.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ {}^{1}3\ 4 \\ +\ \ 2\ 3 \\ \hline 1\ 1\ 2 \end{array}$$

4 + 3 = 12 en base 5. Je pose 2 et je retiens 1.
3 + 2 + 1 = 11 en base 5. Je pose 1 et je retiens 1.
L'addition est donc égale à $\overline{112}^{cinq}$.

4) Soustraire deux nombres de base « B »

• Quand on soustrait deux nombres de base « B », il ne faut pas oublier que la retenue « $_1$ » est égale à « 1 cinquaine ». Pour le reste, on pose la soustraction comme une soustraction classique.

Ex : On veut soustraire $\overline{4312}^{cinq}$ et $\overline{2323}^{cinq}$.

$$\begin{array}{r} 4\ \ {}_{1}3\ \ {}_{1}1\ \ {}_{1}2 \\ -\ {}_{1}2\ \ {}_{1}3\ \ {}_{1}2\ \ 3 \\ \hline 1\ \ 4\ \ 3\ \ 4 \end{array}$$

2 - 3 est impossible. On ajouter une retenue : 2 + 5 - 3 = 4.
1 - 3 est impossible. On ajoute une retenue : 1 + 5 - 3 = 3.
Ainsi de suite.
La soustraction est donc égale à $\overline{1434}^{cinq}$.

5) Multiplier deux nombres de base « B »

• Quand on multiplie deux nombres de base « B », il ne faut pas oublier que la retenue « $_1$ » est égale à « 1 cinquaine », « 1 vingt-cinquaine », etc. suivant son rang. Pour le reste, on pose la multiplication comme une multiplication classique.

Ex : On veut multiplier $\overline{213}^{cinq}$ et $\overline{3}^{cinq}$.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 3 \\ -\ \ \ \ \ 3 \\ \hline 1\ 1\ 4\ 4 \end{array}$$

3 x 3 = 9. Or, 9 = $\overline{14}^{cinq}$. Je pose donc 4 et je retiens « 1 cinquaine ».
1 x 3 = 3 cinquaines. On ajoute la retenue : 4 cinquaines. On pose donc 4.
2 x 3 = 6 vingt-cinquaines, c'est-à-dire $\overline{11}^{cinq}$.
La multiplication est donc égale à $\overline{1144}^{cinq}$.