

Méthodes de dénombrement

Dénombrer consiste à utiliser un moyen approprié pour exprimer une quantité d'unités par un nombre.

1) Tableau à double entrée

- Identifier les paramètres.
- Construire le tableau.
- Compléter le tableau.
- Dénombrer les solutions en comptant le nombre de cases remplies.

Ex : J'ai acheté des perles rondes, carrées et triangulaires. Ces perles sont bleues, vertes, rouges ou jaunes. Combien puis-je avoir de types de perles différents ?

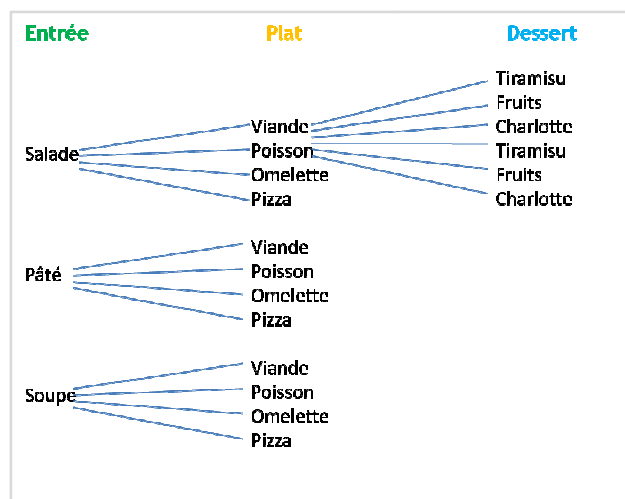
	Bleu	Vert	Rouge	Jaune
Perles triangulaires	Perles triangulaires bleues	Perles triangulaires vertes		
Perles carrées			Perles carrées rouges	
Perles rondes				Perles jaunes rondes

→ Si l'on remplit tout le tableau, on se rend compte que 4×3 cases sont remplies.
Il y a donc 12 types de perles différents.

2) Arbre des choix

- Identifier les paramètres.
- Établir l'arbre.
- Compléter l'arbre.
- Dénombrer les solutions.

Ex : Au restaurant, le menu propose 3 entrées : salade, soupe et pâté // 4 plats : poisson, viande, omelette, pizza // 3 desserts : tiramisu, fruits et charlotte aux fraises. Combien de menus peuvent être composés en prenant une entrée + un plat + un dessert ?



→ Il n'est pas nécessaire de compléter totalement l'arbre pour trouver la solution.
On se rend compte qu'il y a :

$3 \text{ entrées} \times 4 \text{ plats} \times 3 \text{ desserts}$
= 36 repas possibles.

2) Organisation et raisonnement

Parfois, le recours à un schéma n'est pas nécessaire ou trop fastidieux. Il faut seulement faire preuve d'organisation.

Ex : Lors d'une conférence, 50 personnes se rencontrent et se serrent la main. Sachant que chaque personne sert la main à toutes les autres, combien de poignées de mains seront ainsi échangées ?

→ Il y a 50 personnes. La 50^e personne serre 49 mains. La 49^e personne serre 48 mains (puisque la 50^e personne lui a déjà serré la main). La 48^e personne serre 47 mains, et ainsi de suite.

Le nombre de poignées de mains échangées est donc égal à :

$$S = 49 + 48 + 47 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

Pour calculer plus facilement cette somme, il est judicieux de l'écrire à l'envers et d'additionner terme à terme :

$$S = 49 + 48 + 47 + \dots + 3 + 2 + 1.$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + 47 + 48 + 49.$$

On obtient donc : $2S = 50 + 50 + 50 \dots$ (49 fois) $\rightarrow 2S = 49 \times 50$ donc $S = 49 \times 25 = 1225$.

1225 poignées de mains seront échangées lors de la conférence.

On en déduit la méthode générale :

$$S = n + (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 3 + 2 + 1.$$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-3) + (n-2) + (n-1) + n.$$

$$2S = (n+1) + (n+1) + (n+1) \dots \text{répété } n \text{ fois.}$$

$$\text{Donc } S = \frac{n(n+1)}{2}$$