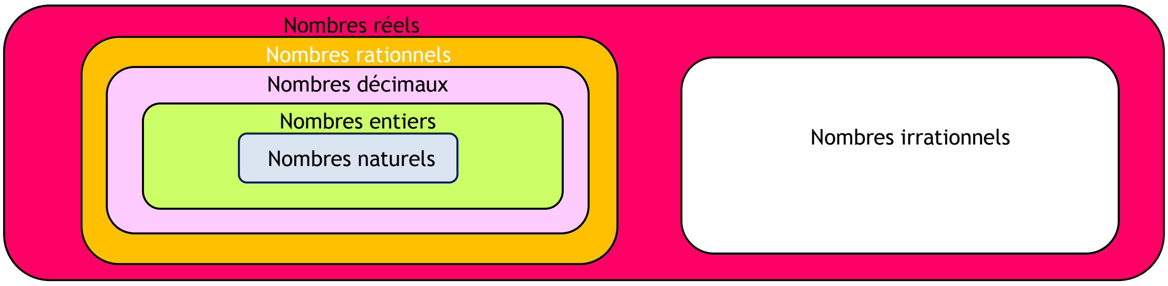
Ensembles de nombres

Naturels ∈Entiers ∈Décimaux ∈Rationnels ∈Réels



1) Les nombres naturels

- Leur ensemble est noté N.
- Leur liste est infinie.
- Ils sont forcément entiers.

Ex : 0, 1, 2, 3, 12, 46, etc.

2) Les nombres entiers

- Leur ensemble est noté Z.
- Ils ne comportent pas de virgule.
- Ils font partie de l'ensemble des nombres décimaux.

Ex : 0, 1, 2, 3, 12, 46, 4/2, etc.

3) Les nombres décimaux

- Leur ensemble est noté D.
- Ils sont formés d'un nombre limité de chiffres et parfois d'une virgule.
- Un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^\wedge n}$.
- Une fraction représente un nombre décimal si son dénominateur est composé uniquement de puissances de 2 et/ou de puissances de 5.

Ex : 1 ; 2 ; 3,6 ; 5/2 ; -3,64 ; etc.

4) Les nombres rationnels

- Leur ensemble est noté Q.
- Ils peuvent être écrits sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ (a et b étant des entiers ≠ de 0).
- Ils sont la solution à une équation du type : b x $x = a$, puisque $x = \frac{a}{b}$.
- Les nombres avec une virgule suivie d'une suite périodique sont des rationnels non-décimaux.

5) Les nombres réels

- Leur ensemble est noté R.
- Les nombres réels englobent tous les nombres.
- Ils peuvent être rationnels ou irrationnels (**ex** : $\sqrt{2}$)

Méthode

1) Reconnaître deux fractions égales

- Appliquer la règle de trois pour ces deux fractions (= produit en croix).
- Vérifier l'égalité.

Ex : On cherche à savoir si $\frac{12}{15}$ et $\frac{8}{10}$ sont égales.
On applique la règle de trois : 12 x10 = 120 et 15 x 8 = 120.
Les deux fractions sont donc égales.

2) Trouver une fraction égale à une autre fraction

- Multiplier ou diviser le numérateur et le dénominateur de la fraction par un même nombre entier non nul.

Ex : On cherche une fraction égale à $\frac{8}{10}$.
On peut diviser 8 et 10 par le chiffre 2. **On obtient : $\frac{4}{5}$.**

3) Obtenir une fraction irréductible

- Chercher le **plus grand diviseur commun (pgcd)** en décomposant le nombre en produits de facteurs premiers.
- Diviser le numérateur et le dénominateur par le pgcd.

Ex : On cherche la fraction irréductible égale à $\frac{440}{336}$.
440 = 2^3 x 5 x 11 et 336 = 2^4 x 3 x 7. Le pgcd est donc égal à 2^3.
$\frac{440 \div 2\wedge 3}{336 \div 2\wedge 3} = \frac{55}{42}$. **La fraction irréductible est donc $\frac{55}{42}$.**

3) Comparer deux fractions

- Si les dénominateurs sont égaux, la fraction la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.
- Si les numérateurs sont égaux, la fraction la plus grande est celle qui a le plus petit dénominateur.
- Si le numérateur et le dénominateur des deux fractions sont différents, on a trois options :
  - On remplace chaque fraction par une fraction égale
  - On calcule les valeurs décimales approchées de ces deux fractions
  - On situe les fractions par rapport à des nombres simples (ex : $\frac{7}{15} < \frac{1}{2}$)

4) Intercaler une fraction entre deux fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b}$

Méthode 1

• Multiplier les deux fractions (numérateur et dénominateur) par 10. Toutes les fractions comprises entre les fractions obtenues peuvent être intercalées entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b}$.

Méthode 2

• La demie-somme de $a + a'$ est plus grande que a mais plus petite que a'. On en déduit :

$$\boxed{\frac{a+a'}{2} = \frac{1}{2} \times (a + a')}$$

• La fraction ainsi obtenue sera donc comprise entre $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b}$.

Ex : On veut intercaler un nombre entre $\frac{87}{93}$ et $\frac{88}{93}$.

$\frac{a+a'}{2} = \frac{1}{2} \times (a + a') = \frac{1}{2} \times \frac{87+88}{93} = \frac{175}{186}$

5) Trouver la partie entière d'une fraction (<u>division euclidienne</u>)

Pour une fraction $\frac{a}{b}$ positive

• Calculer le quotient (q) et le reste (r) de la division de a par b grâce à la division euclidienne :

$$\boxed{a = (b \times q) + r} \qquad \text{avec } r < b$$

• Le quotient = partie entière
• Le reste = numérateur de la fraction complémentaire :

$$\boxed{\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}} \qquad \text{avec } \frac{r}{b} < 1$$

Pour une fraction $\frac{-a}{b}$ négative

• La méthode est la même. Attention : le reste est toujours positif. Il sera donc différent de celui trouvé pour la fraction positive.

$$\boxed{-a = (b \times -q) + r}$$

6) Écrire un rationnel non-décimal avec une suite périodique sous forme fractionnaire

• Appeler x le nombre donné.
• Multiplier x par une puissance de 10, de façon à obtenir un nombre 1 qui englobe la première période (= où la virgule est située <u>après</u> **la première période**).
• Multiplier x par une puissance de 10, de façon à obtenir un nombre 2 qui n'englobe pas la première période (= où la virgule est située <u>avant</u> **la première période**).
• Soustraire le nombre 1 et le nombre 2 pour obtenir la fraction.

Ex : On veut trouver la forme fractionnaire de $15{,}0\overline{32}$ (=15,03232...)

$x = 15{,}0\overline{32}$
$1000\,x = 15032{,}323232...$
$10\,x = 150{,}323232...$
$1000\,x - 10\,x = 15032{,}323232... - 150{,}323232...$
$990\,x = 15032 - 150 = 14882$
$x = \frac{14882}{990} = \frac{7441}{495}$

7) Approximation décimale d'un nombre réel

a) Valeur approchée

On distingue la valeur approchée par défaut : a < x < a + p
Et la valeur approchée par excès : a – p < x < a

b) Arrondi

On arrondit à l'unité, au dixième, au centième, etc., systématiquement à l'unité supérieure quand le dernier chiffre est égal ou supérieur à 5.

c) Troncature

Il suffit de « couper » le nombre au rang demandé.